



Procura heurística

Cap 3 (3.5 e 3.6)

Parcialmente adaptado de
<http://aima.eecs.berkeley.edu>

Resumo

- Procura pelo melhor primeiro
- Procura sôfrega
- Procura A^*
- Heurísticas e suas propriedades
- Procura informada com memória limitada

Implementação: procura genérica em árvores

```
function TREE-SEARCH( problem, frontier ) returns a solution, or failure
  node  $\leftarrow$  node with STATE = problem.INITIAL-STATE, PATH-COST = 0
  frontier  $\leftarrow$  INSERT(node, frontier)
  loop do
    if EMPTY?(frontier) return failure
    node  $\leftarrow$  POP( frontier )
    if problem.GOAL-TEST(node.STATE) then return SOLUTION(node)
    frontier  $\leftarrow$  INSERT-ALL(EXPAND(node,problem),frontier)
```

```
function EXPAND( node, problem ) returns a set of nodes
  successors  $\leftarrow$  the empty set
  for each action in problem.ACTIONS (node.STATE) do
    s  $\leftarrow$  CHILD-NODE(problem,node,action)
    add s to successors
  return successors
```

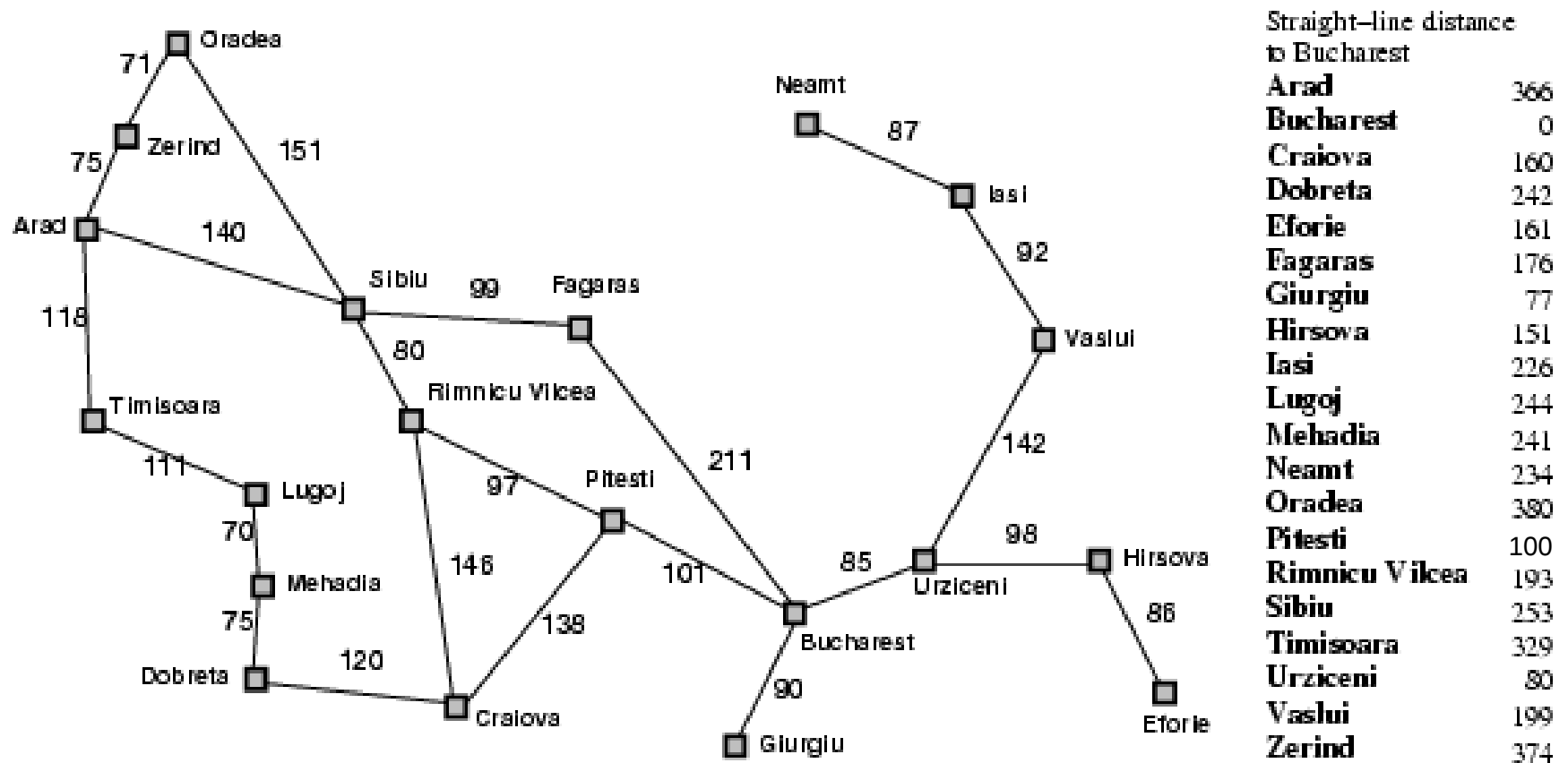
```
function CHILD-NODE( problem, par, action) returns a node
return a node with
  STATE = problem.RESULT(par.STATE,action),
  PARENT = par, ACTION = action , DEPTH  $\leftarrow$  parent.DEPTH+1
  PATH-COST = par.PATH-COST + problem.STEP-COST(par.STATE, action)
```

Procura pelo melhor primeiro

- Ideia: aplicar uma **função de avaliação** $f(n)$ a cada nó
 - Indica-nos se o nó é promissor ou não
 - expandir o nó que aparenta ser mais promissor
 -
- Implementação:

Ordenar os nós na fronteira por ordem crescente (minimizar) ou decrescente (maximizar) da função de avaliação
- Casos especiais:
 - Procura sôfrega
 - Procura A^*
 -

Roménia com distâncias em linha recta km



Procura sôfrega

- Função de avaliação $f(n) = h(n)$ (**h**eurística)
- = estimativa do custo do menor caminho para ir de n até a um estado objectivo
- - $h_{SLD}(n)$ = distância em linha recta de n até Bucareste
 -
- Procura sôfrega expande o nó que **aparenta** estar mais próximo do objectivo

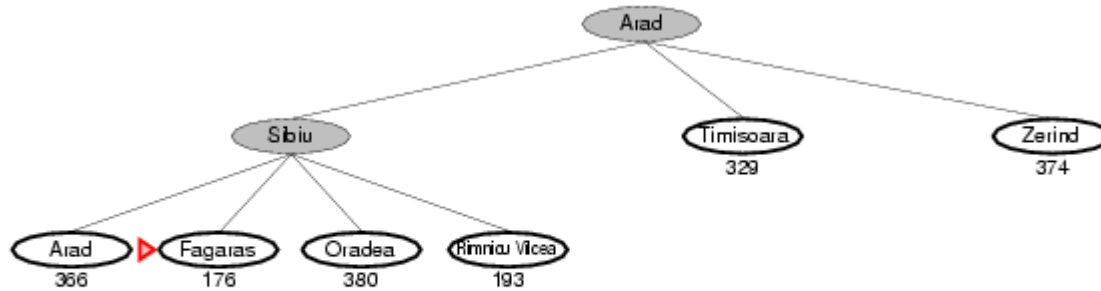
Exemplo de procura sôfrega



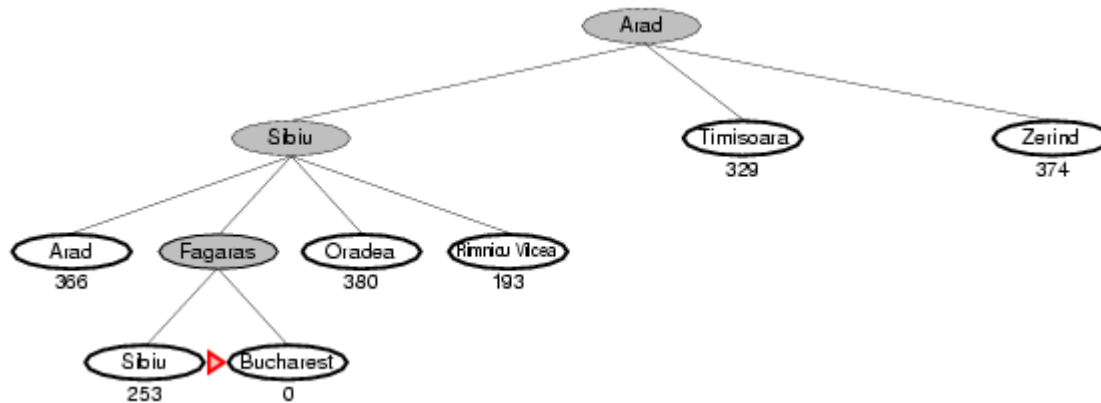
Exemplo de procura sôfrega



Exemplo de procura sôfrega



Exemplo de procura sôfrega



Propriedades da procura sôfrega

- Completa? Não – pode ficar presa em ciclos, e.g., com Oradea como objectivo Iasi → Neamt → Iasi → Neamt
Completa em espaços finitos com verificação de estados repetidos
- Tempo? $O(b^m)$, mas uma boa heurística pode ter melhorias espectaculares
- Espaço? $O(b^m)$ – mantém todos os nós em memória
- Óptima? Não
-

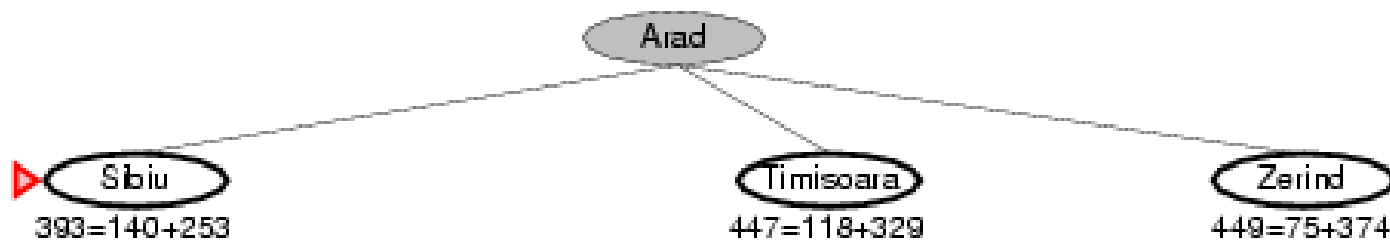
Procura A^*

- Ideia: evitar expandir caminhos que já têm elevado custo
- Função de avaliação $f(n) = g(n) + h(n)$
 - $g(n)$ = custo actual para atingir n
 - $h(n)$ = custo estimado para atingir o objectivo a partir de n
 - $f(n)$ = custo total estimado do caminho até ao objectivo passando por n
 -

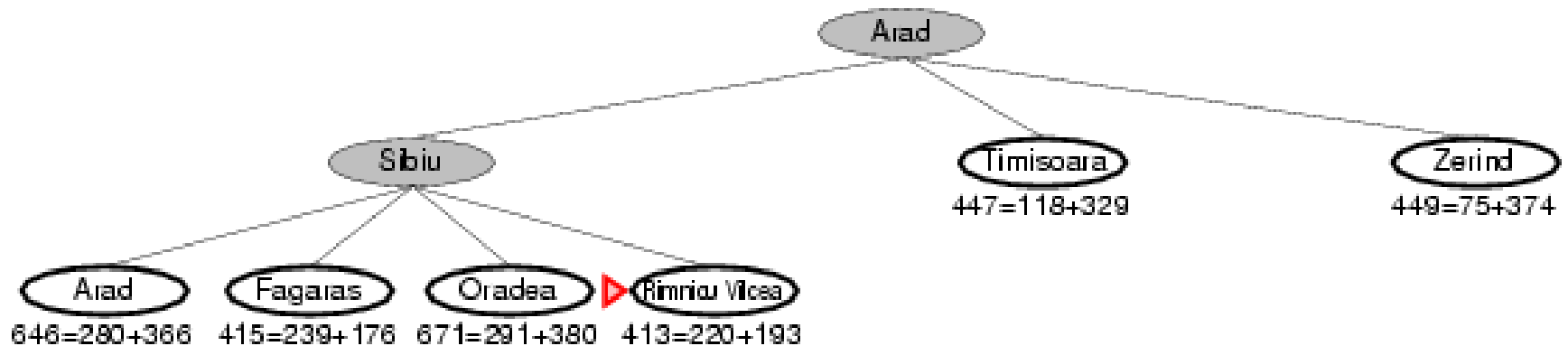
Exemplo de Procura A*



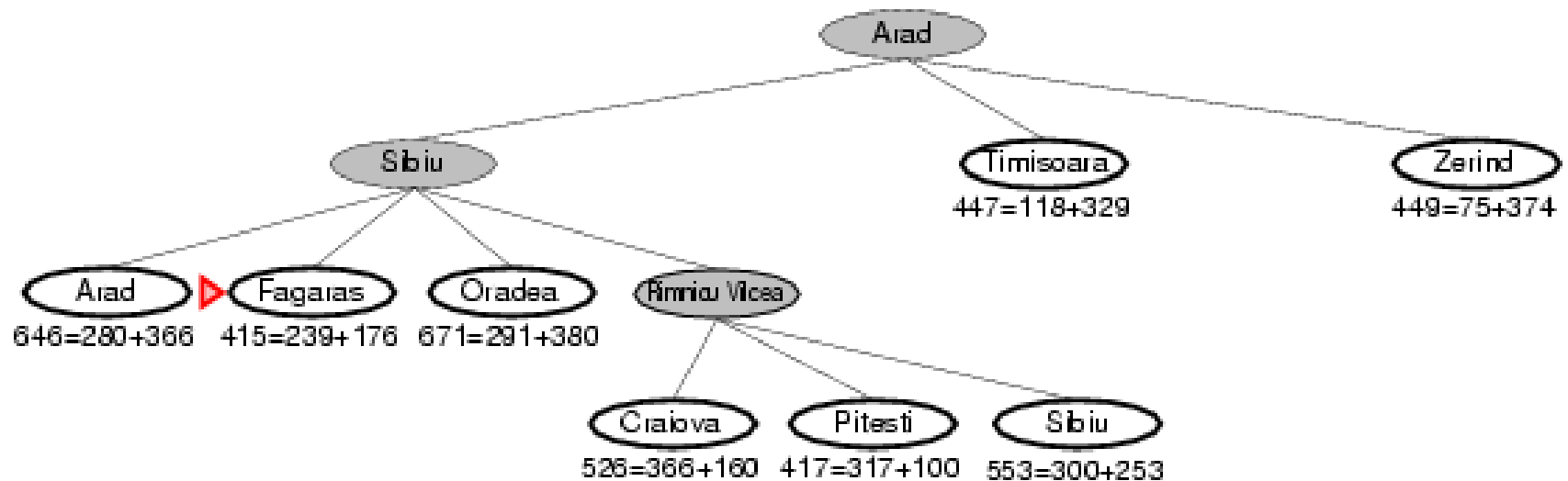
Exemplo de Procura A*



Exemplo de Procura A*



Exemplo de Procura A*



```

graph TD
    Arad --> Sibiu
    Arad --> Timisoara
    Arad --> Zerind
    Sibiu --> Arad
    Sibiu --> Fagaras
    Sibiu --> Oradea
    Sibiu --> Rimnicu_Vilcea[Rimnicu Vilcea]
    Fagaras --> Sibiu
    Fagaras --> Bucharest
    Rimnicu_Vilcea --> Craiova
    Rimnicu_Vilcea --> Pitesti
    Rimnicu_Vilcea --> Sibiu
    Timisoara --> Lugoj
    Zerind --> Giurgiu

```

Arad

Sibiu

Timisoara
447=118+329

Zerind
449=75+374

Arad
646=280+366

Fagaras

Oradea
671=291+380

Rimnicu Vilcea

Sibiu
591=338+253

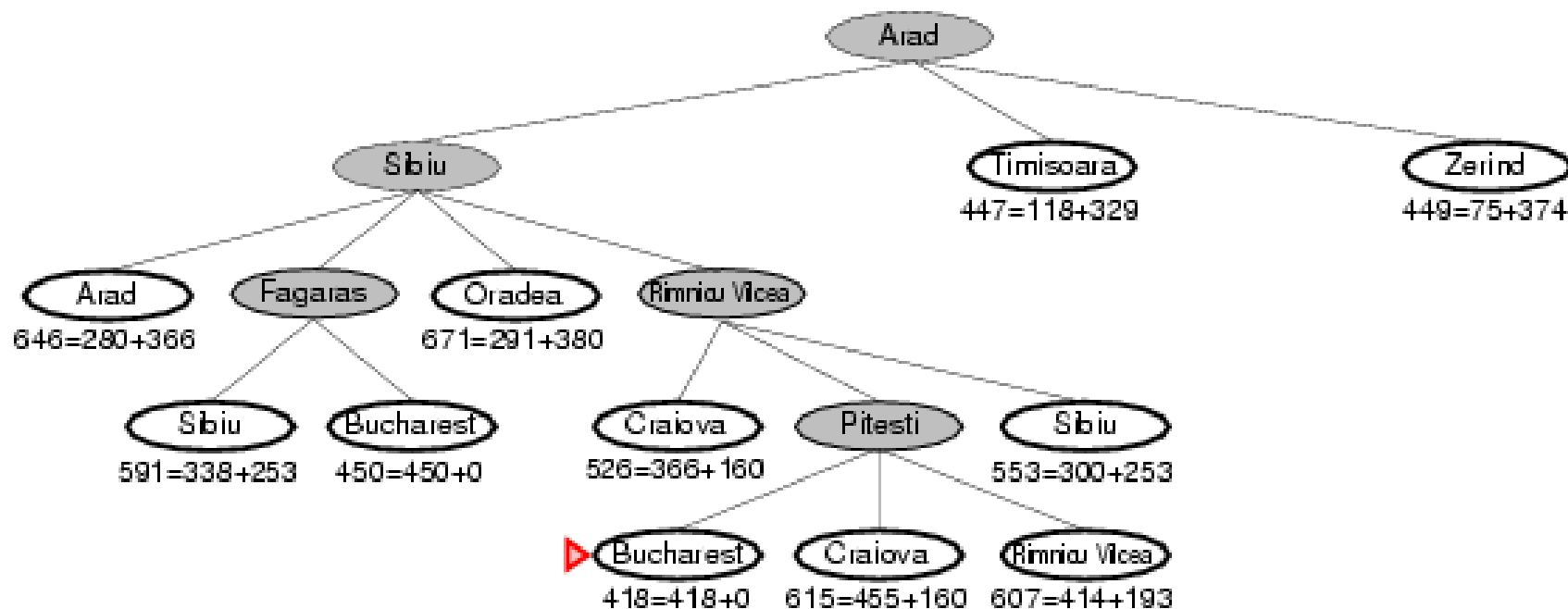
Bucharest
450=450+0

Craiova
526=366+160

Pitesti
417=317+100

Sibiu
553=300+253

Exemplo de Procura A*

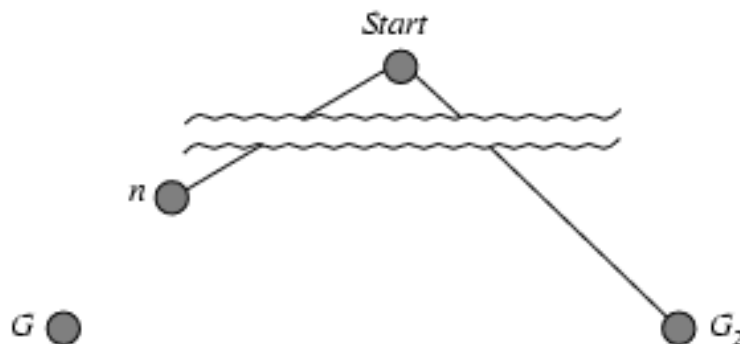


Heurísticas admissíveis

- Uma heurística $h(n)$ é **admissível** se para todo o nó n , $h(n) \leq h^*(n)$, em que $h^*(n)$ é o custo **real** de atingir o objectivo a partir de n .
- Uma heurística admissível **nunca sobrestima** o custo de alcançar o objectivo, i.e., é **optimista**.
- Exemplo: $h_{SLD}(n)$ (nunca sobrestima a distância por estrada)
- **Teorema**: Se $h(n)$ é admissível, então o algoritmo A^* usando TREE-SEARCH é óptimo.

Optimalidade de A^* (demonstração)

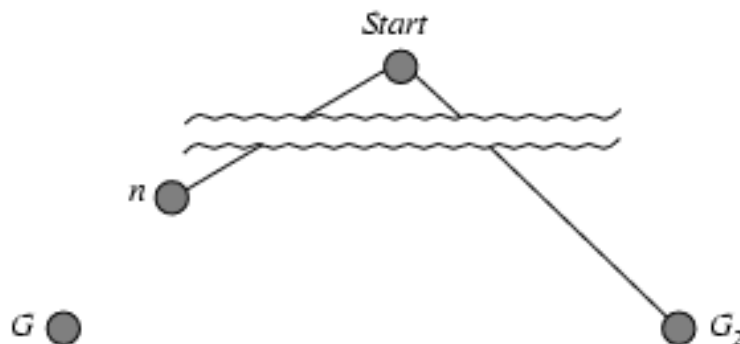
- Suponha-se que um estado final subóptimo G_2 foi gerado e encontra-se na fronteira. Seja n um nó por expandir na fronteira num caminho mais curto para o objectivo óptimo G .



- $f(G_2) = g(G_2)$ pois $h(G_2) = 0$
- $g(G_2) > g(G)$ porque G_2 é subóptimo
- $f(G) = g(G)$ pois $h(G) = 0$
- Logo $f(G) < f(G_2)$

Optimalidade de A^* (redução ao absurdo)

- Suponha-se que um estado final subóptimo G_2 foi gerado e encontra-se na fronteira. Seja n um nó por expandir na fronteira num caminho mais curto para o objectivo óptimo G .

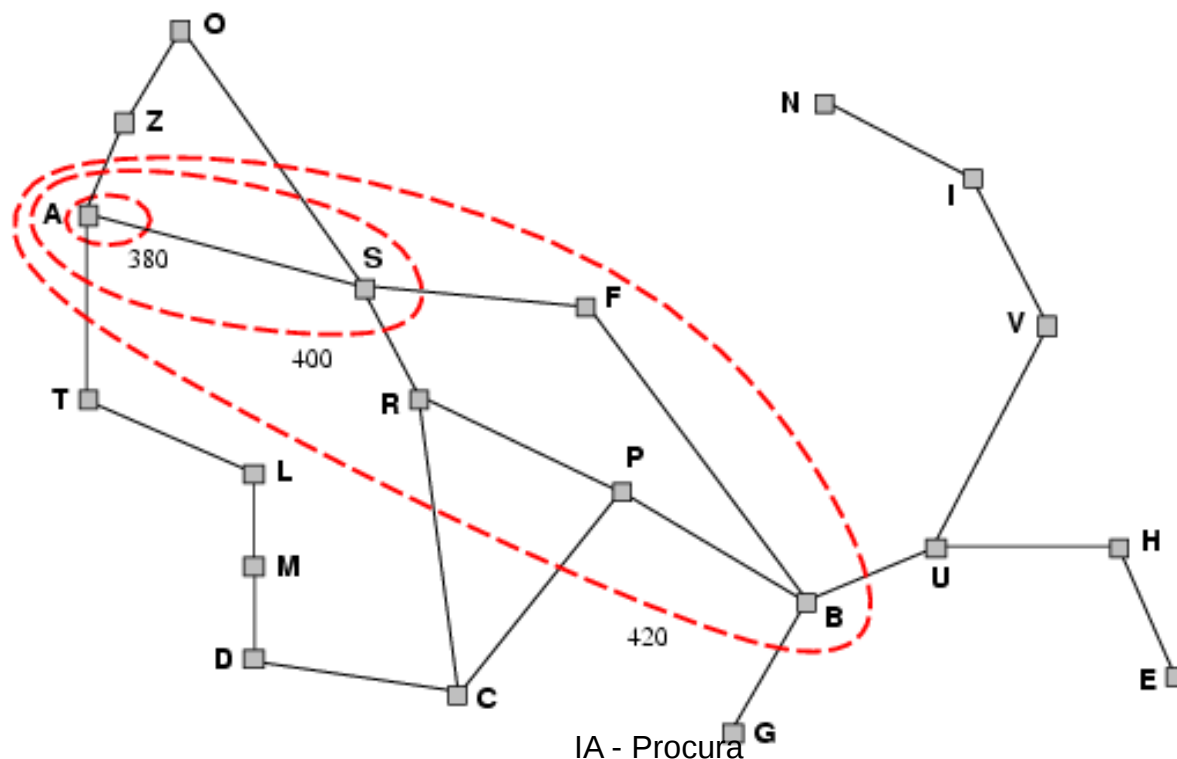


- $f(G_2) > f(G)$ como se viu anteriormente
- $h(n) \leq h^*(n)$ porque h é admissível
- $g(n) + h(n) \leq g(n) + h^*(n)$
- $f(n) \leq f(G)$

Portanto $f(G_2) > f(n)$, e o A^* nunca seleccionará G_2 para expansão

Optimalidade de A^* (mais útil)

- A^* expande nós por ordem crescente de valores da função de avaliação
- Adiciona gradualmente contornos aos nós (c.f. procura em largura adiciona níveis)
- Contorno i tem todos os nós $f=f_i$, em que $f_i < f_{i+1}$
-



Propriedades do A*

- O A* expande todos os nós com $f(n) < C^*$
- O A* expande alguns nós com $f(n) = C^*$
- O A* nunca expande nós com $f(n) > C^*$

O algoritmo A* é optimalmente eficiente para qualquer heurística dada:

- Não há outro algoritmo **ótimo** que garantidamente expanda um menor número de nós!

Propriedades do A*

- Completo? Sim (a não ser que haja um número infinito de nós com $f \leq f(G)$)



- Tempo? Exponencial no [erro relativo de h x o tamanho da solução]

Se $|h(n) - h^*(n)| \leq O(\log h^*(n))$ o algoritmo A* tem um comportamento subexponencial.

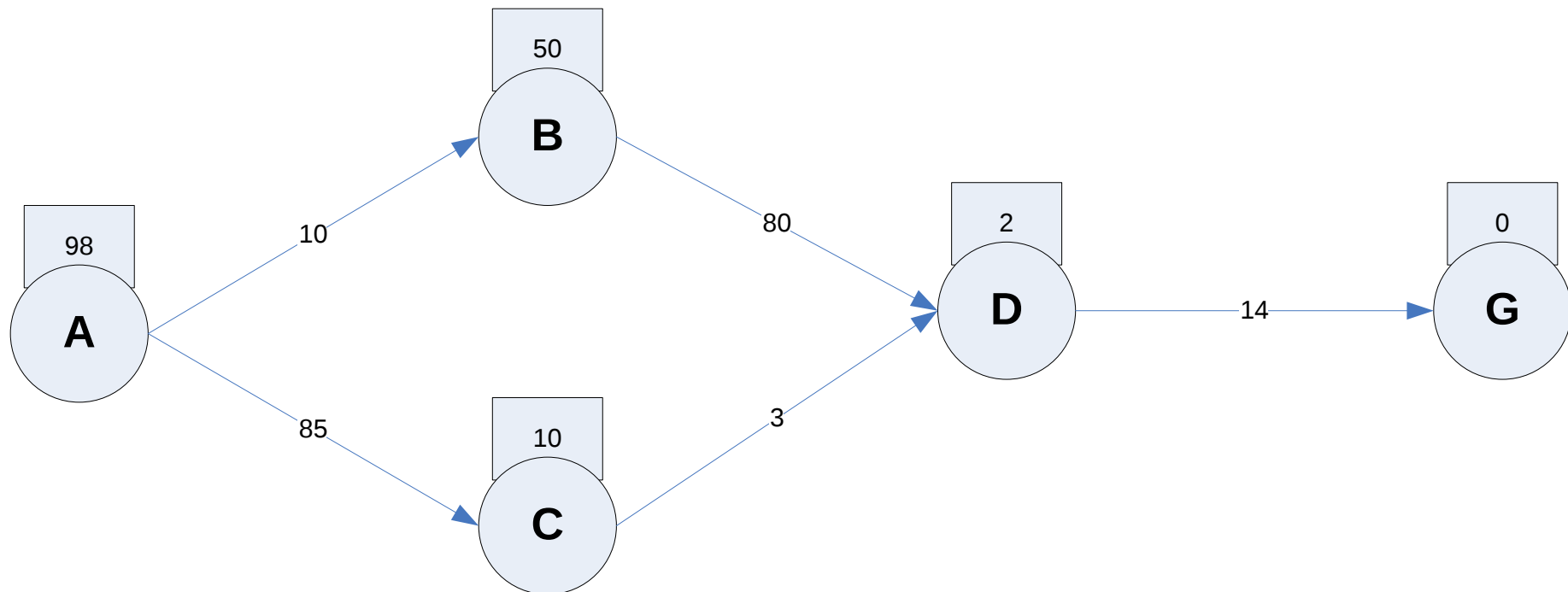
- Espaço? Mantém todos os nós em memória



- Óptimo? Sim, se a heurística for admissível



Problemas da versão naíve do A* com procura em grafos



fronteira

A(98)	B(60) C(95)	D(92) C(95)	C(95) G(104)	D(90) G(104)	G(104)
	A	A B	A B D	A B C D	A B C D

explorados

Heurísticas consistentes

A demonstração de optimalidade do A* não se generaliza para o algoritmo de procura em grafos (eliminação de estados já explorados)

- Uma heurística é **consistente** se para todo o nó n e todo o seu sucessor n' , gerado pela ação a ,

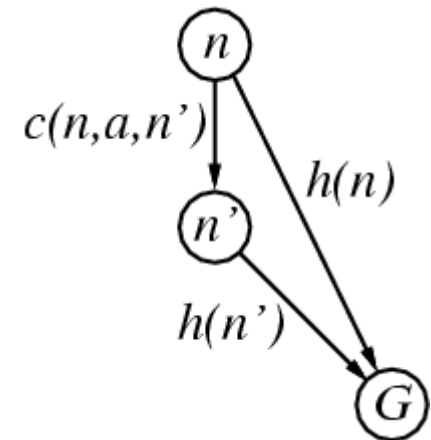
$$h(n) \leq c(n,a,n') + h(n')$$

- Se h é consistente, temos

$$\begin{aligned} f(n') &= g(n') + h(n') \\ &= g(n) + c(n,a,n') + h(n') \\ &\geq g(n) + h(n) \\ &= f(n) \end{aligned}$$

- ou seja, $f(n)$ é não decrescente ao longo de qualquer caminho (é **monótona**).

- **Teorema:** Se $h(n)$ for consistente, então o A* recorrendo à procura GRAPH-SEARCH é ótimo.



A* (versão otimizada em grafos)

function A*(*problem*) **returns** a solution, or failure

node $\leftarrow$ a node with STATE=*problem*.INITIAL-STATE, PATH-COST = 0

frontier $\leftarrow$ a priority queue ordered by f-value with *node* as the only element

explored $\leftarrow$ a singleton set with *node*.STATE

loop do

if EMPTY?(*frontier*) **then** return failure

node $\leftarrow$ POP(*frontier*) /* chooses the node with lowest f-value in *frontier* */

if *problem*.GOAL-TEST(*node*.STATE) **then return** SOLUTION(*node*)

add *node*.STATE to *explored*

for each *action* **in** *problem*.ACTIONS(*node*.STATE) **do**

child $\leftarrow$ CHILD-NODE(*problem* , *node* , *action*)

if *child*.STATE is not in *explored* or *frontier* **then do**

frontier $\leftarrow$ INSERT(*child* , *frontier*)

else if *child*.STATE is in *frontier* with higher f-value **then**

 replace that *frontier* node with *child*

Ótimo só para
heurísticas
consistentes!!!

O que fazer com heurísticas inconsistentes?

Solução simples: o conjunto de explorados mantém nós em vez de estados.

- Seja n um novo nó gerado pelo algoritmo. Se existir um nó m no conjunto de explorados para o mesmo estado de n tal que $f(n) < f(m)$ então retira-se o nó m do conjunto de explorados e coloca-se o novo nó n na fronteira.
- Com esta alteração, a utilização de heurísticas admissíveis garantem novamente a optimalidade da primeira solução encontrada pelo algoritmo de procura em grafos A^* .

Procura A* em grafos corrigida

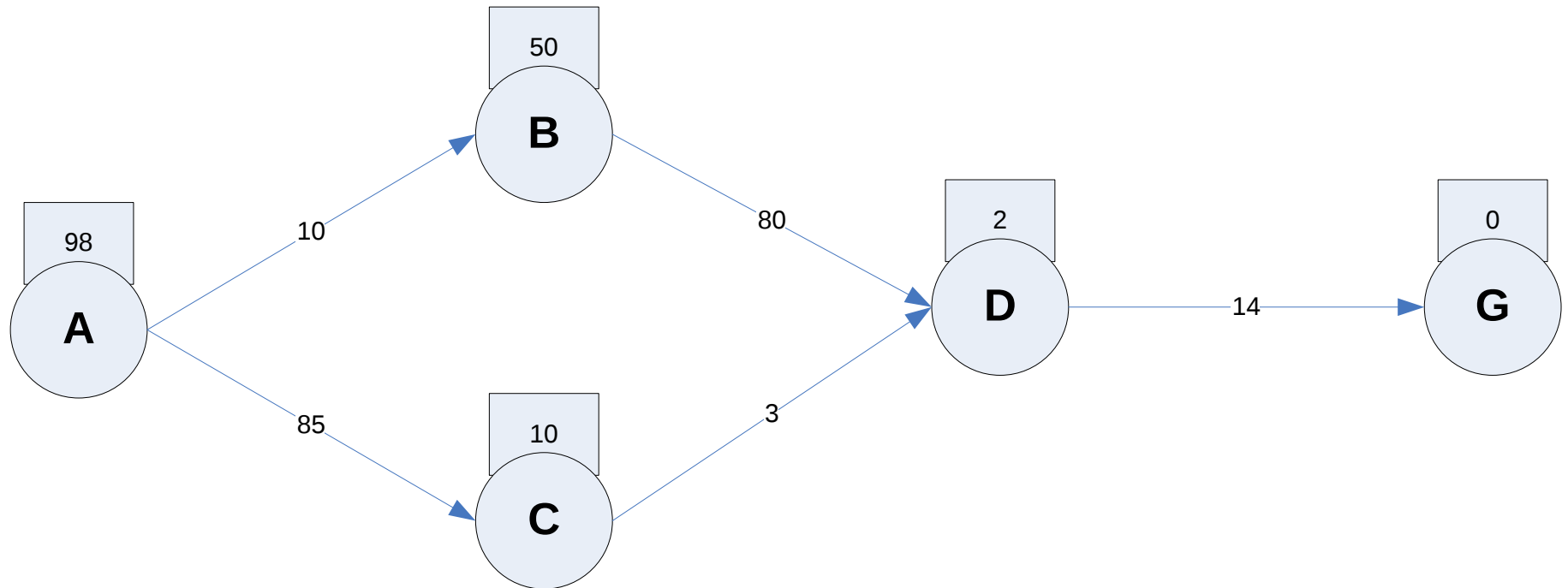
```
function GRAPH-SEARCH( problem, frontier ) returns a solution, or failure
  explored  $\leftarrow$  an empty set of nodes
  node  $\leftarrow$  node with STATE = problem.INITIAL-STATE, PATH-COST = 0
  frontier  $\leftarrow$  INSERT(node, frontier) /* priority queue ordered by f-value */
  loop do
    if EMPTY?(frontier) return failure
    node  $\leftarrow$  POP( frontier ) /* chooses the node with lowest f-value in
frontier */

    if problem.GOAL-TEST(node.STATE) then return SOLUTION(node)
    if node.STATE is not in explored then
      add node to explored
      frontier  $\leftarrow$  INSERT-ALL(EXPAND(node,problem),frontier)
    else if node.STATE = oldnode.STATE such that oldnode in explored
      has higher f-value than node then
      replace oldnode by node in explored
      frontier  $\leftarrow$  INSERT-ALL(EXPAND(node,problem),frontier)
    endif
```

Garante óptimo
para heurísticas
admissíveis!!!



A* com procura em grafos (corrigido)



...	C(95) G(104)	D(90) G(104)	G(102) G(104)
...	A(98) B(60) D(92)	A(98) B(60) C(95) D(92)	A(98) B(60) C(95) D(90)

Estimativa PathMax

Existe uma optimização que tenta manter a heurística consistente (estimativa PathMax) mas mais complexa.

- A ideia consiste em utilizar como valor da função de avaliação

$$f^{\wedge}(m) = \max \{f(n); f(m)\}$$

- em que m é sucessor de n . O valor de $f^{\wedge}(m)$ é obtido em tempo de execução e depende do caminho seguido para atingir m .
- Poderá ser necessário remover na mesma nós do conjunto de explorados.

Implementação dos algoritmos

Obviamente, deve-se ter algum cuidado na seleção das estruturas de dados para implementar a fronteira e o conjunto de estados explorados. Habitualmente o conjunto de estados explorados é implementado com uma tabela de dispersão (hash table). Quanto à fronteira, normalmente opta-se por:

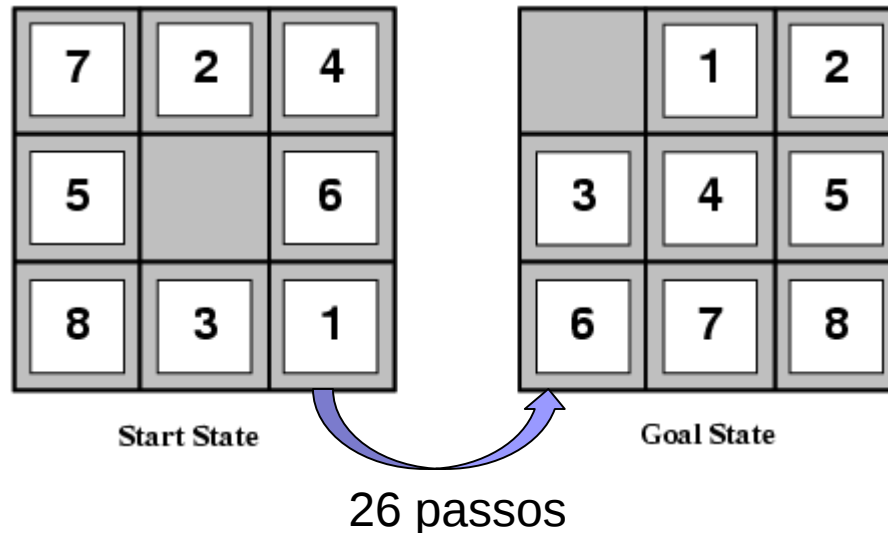
- Fila de prioridade (priority queue) quando o grafo de estados é esparso: número reduzido de nós sucessores limitados por uma constante pequena. Complexidade temporal $O(N * \log_2 N + L * \log_2 N)$, em que N o número de estados e L o número de arcos. Esta é a situação habitual:
 - No pior caso têm de se retirar N nós da fila de prioridade, cada uma destas operações da ordem de $\log_2 N$
 - São necessárias no pior caso L inserções na fila de prioridade, cada uma com custo $\log_2 N$.
- Quando o grafo é denso, então deve-se utilizar uma lista ou tabela de dispersão. Complexidade temporal da ordem de $O(N^2 + L)$
 - Retirar o nó com menor custo é operação $O(N)$, no máximo N vezes.
 - A inserção de um nó sucessor na fronteira pode ser feita com uma operação de $O(1)$

Comparação implementações

N	Densidade	L	$N \cdot \log N + L \cdot \log N$	$N \cdot N + L$	Rácio
10	1%	1	37	101	0,36
10	10%	10	66	110	0,60
10	50%	50	199	150	1,33
10	90%	90	332	190	1,75
10	100%	100	365	200	1,83
100	1%	100	1329	10100	0,13
100	10%	1000	7308	11000	0,66
100	50%	5000	33884	15000	2,26
100	90%	9000	60459	19000	3,18
100	100%	10000	67103	20000	3,36
1000	1%	10000	109624	1010000	0,11
1000	10%	100000	1006544	1100000	0,92
1000	50%	500000	4992858	1500000	3,33
1000	90%	900000	8979172	1900000	4,73
1000	100%	1000000	9975750	2000000	4,99
10000	1%	1000000	13420590	101000000	0,13
10000	10%	10000000	133010001	110000000	1,21
10000	50%	50000000	664518496	150000000	4,43
10000	90%	90000000	1196026991	190000000	6,29
10000	100%	100000000	1328904115	200000000	6,64
100000	1%	100000000	1662625011	10100000000	0,16
100000	10%	1000000000	16611301438	11000000000	1,51
100000	50%	5000000000	83049863336	15000000000	5,54
100000	90%	9000000000	149488425234	19000000000	7,87
100000	100%	10000000000	166098065708	20000000000	8,30

Heurísticas admissíveis

Para a charada-8 uma procura exaustiva explora em média $3,1 \times 10^{10}$ nós. Mas existem apenas 181440 estados (charada-15 são 10^{13}). É fundamental a utilização de heurísticas



- $h_1(n)$ = número de peças colocadas erradamente
 - $h_1(S) = 8$
- $h_2(n)$ = soma das distâncias de Manhattan
 - $h_2(S) = 3+1+2+2+3+2+2+3=18$
 -

Dominância

- Se $h_2(n) \geq h_1(n)$ para todo o n (ambas admissíveis) então h_2 **domina** h_1 , sendo h_2 melhor na procura
- Custos típicos de procura para charada-8 (número médio de nós expandidos):
 - - $d=12$

AP = 3,644,035 nós	($b^* = 2,78$)
$A^*(h_1) = 227$ nós	($b^* = 1,42$)
$A^*(h_2) = 73$ nós	($b^* = 1,24$)
 - $d=24$

AP $\approx$ 54.000.000.000 nós	
$A^*(h_1) = 39,135$ nós	($b^* = 1,48$)
$A^*(h_2) = 1,641$ nós	($b^* = 1,26$)
- Caso $h_2(n)$ não domine $h_1(n)$, e vice-versa, pode-se sempre combinar as heurísticas com a expressão $\max \{h_1(n), h_2(n)\}$
- O factor de ramificação efetivo b^* caracteriza a qualidade da heurística utilizada. O valor b^* é obtido resolvendo a equação $N + 1 = 1 + b^* + (b^*)^2 + \dots + (b^*)^d$, em que N é o número de nós gerados pelo A^* e d a profundidade da solução obtida.

Problemas relaxados

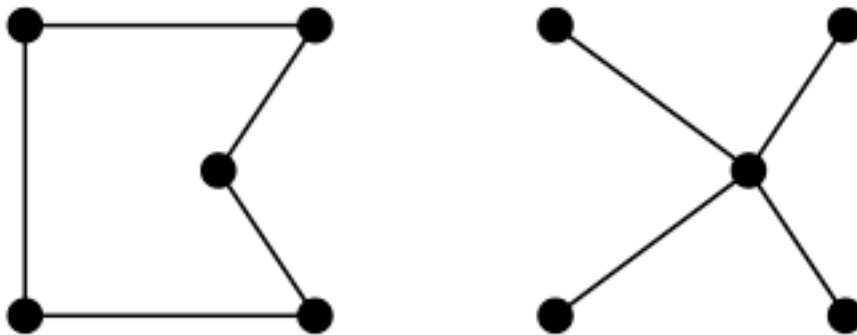
- Um problema com menos restrições nas acções é designado por **problema relaxado**.
- O custo exato de uma solução óptima para o problema relaxado é uma heurística admissível para o problema original!

Considere-se a charada- n novamente

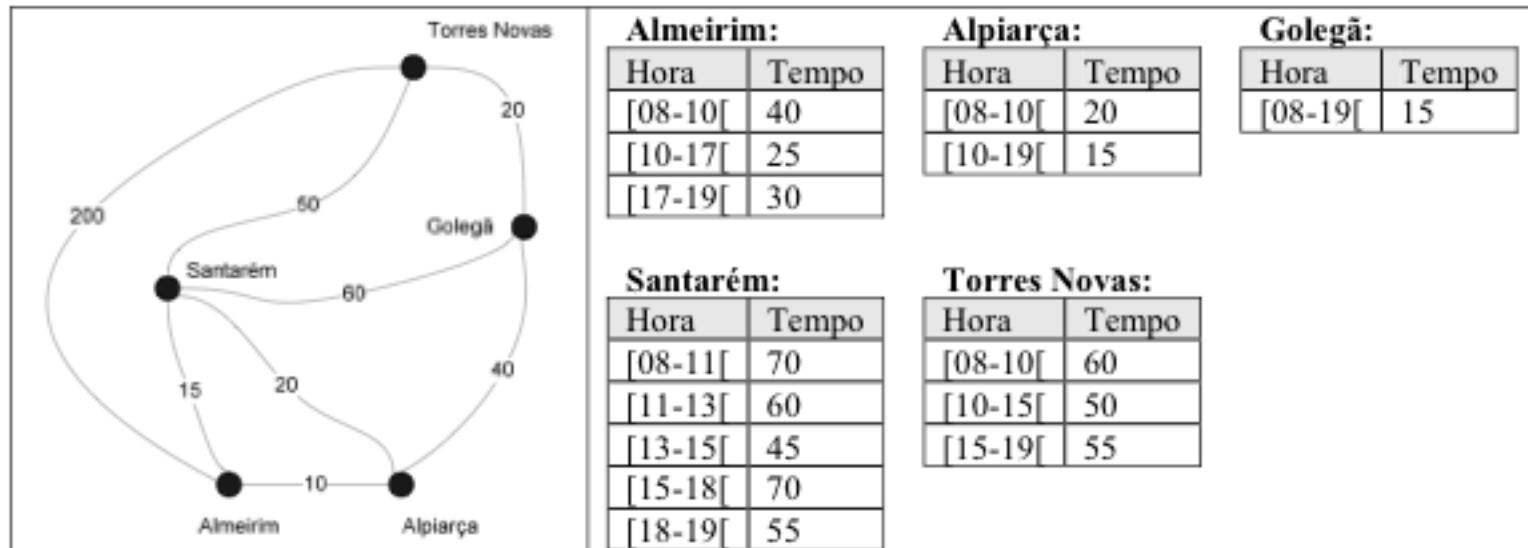
- Se as regras da charada- n forem relaxadas de maneira a que uma peça se possa movimentar para *qualquer posição*, então $h_1(n)$ dá-nos a melhor solução.
- Se as regras da charada- n forem relaxadas de maneira a que uma peça se possa movimentar para *qualquer posição adjacente*, então $h_2(n)$ dá-nos a melhor solução.

Problema do caixeiro viajante

- Encontrar o circuito mais curto que visita todas as cidades exatamente uma vez.
- Árvore de cobertura mínima pode ser obtida em $O(n^2)$ e é um limite inferior ao menor circuito (aberto)



Caixeiro viajante dependente do tempo



Pretende-se partir de uma cidade, entregando produtos em cada uma das cidades, voltando ao início. O tempo de entrega nas cidades depende da hora de chegada. A viatura parte às 8 horas da manhã.

- Heurística admissível ?

Procura informada com memória limitada

- Procura informada com memória limitada
 - Algoritmo IDA*
 - Algoritmo recursivo de procura pelo melhor primeiro (RBFS)
 - Algoritmo A* de memória limitada simplificado

A* por aprofundamento progressivo

function IDA*(*problem*) **returns** a solution sequence

inputs: *problem*, a problem

local variables: *f-limit*, the current *f*- COST limit
root, a node

root $\leftarrow$ MAKE-NODE(INITIAL-STATE[*problem*])

f-limit $\leftarrow$ *f*- COST[*root*]

loop do

solution, *f-limit* $\leftarrow$ DFS-CONTOUR(*root*, *f-limit*)

if *solution* is non-null **then return** *solution*

if *f-limit* = ∞ **then return** failure; **end**

A* por aprofundamento progressivo

```
function DFS-CONTOUR(node, f-limit) returns a solution
sequence and a new f- COST limit
  inputs: node, a node
           f-limit, the current f- COST limit
  local variables: next-f, the f- COST limit for the next contour, initially  $\infty$ 
  if f- COST[node] > f-limit then return null, f- COST[node]
  if GOAL-TEST[problem](STATE[node]) then return node, f-limit
  for each node s in SUCCESSORS(node) do
    solution, new-f  $\leftarrow$  DFS-CONTOUR(s, f-limit)
    if solution is non-null then return solution, f-limit
    next-f  $\leftarrow$  MIN(next-f, new-f); end
  return null, next-f
```

Propriedades do IDA*

- Completo
- Espaço linear
- Óptimo
- Prático se os custos dos passos forem unitários
- Dificuldade em lidar com custos reais, podendo acarretar grande tempo de processamento motivado por regenerações sucessivas de nós

A análise de sobrecarga efectuada para as versões cegas não é válida aqui!

function RECURSIVE-BEST-FIRST-SEARCH(*problem*)
returns a solution, or failure
 RBFS(*problem*, MAKE-NODE(INITIAL-STATE[*problem*]), ∞)

function RBFS(*problem*, *node*, *f-limit*) **returns** a solution, or failure and a new *f*-cost limit

if GOAL-TEST[*problem*](STATE[*node*]) **then return** *node*

successors $\leftarrow$ EXPAND(*node*, *problem*)

if *successors* is empty **then return** *failure*, ∞

for each *s* **in** *successors* **do**

$f[s] \leftarrow \text{MAX}(g(s)+h(s), f[\text{node}])$

repeat

best $\leftarrow$ the lowest *f*-value node in *successors*

if $f[\text{best}] > f\text{-limit}$ **then return** *failure*, $f[\text{best}]$

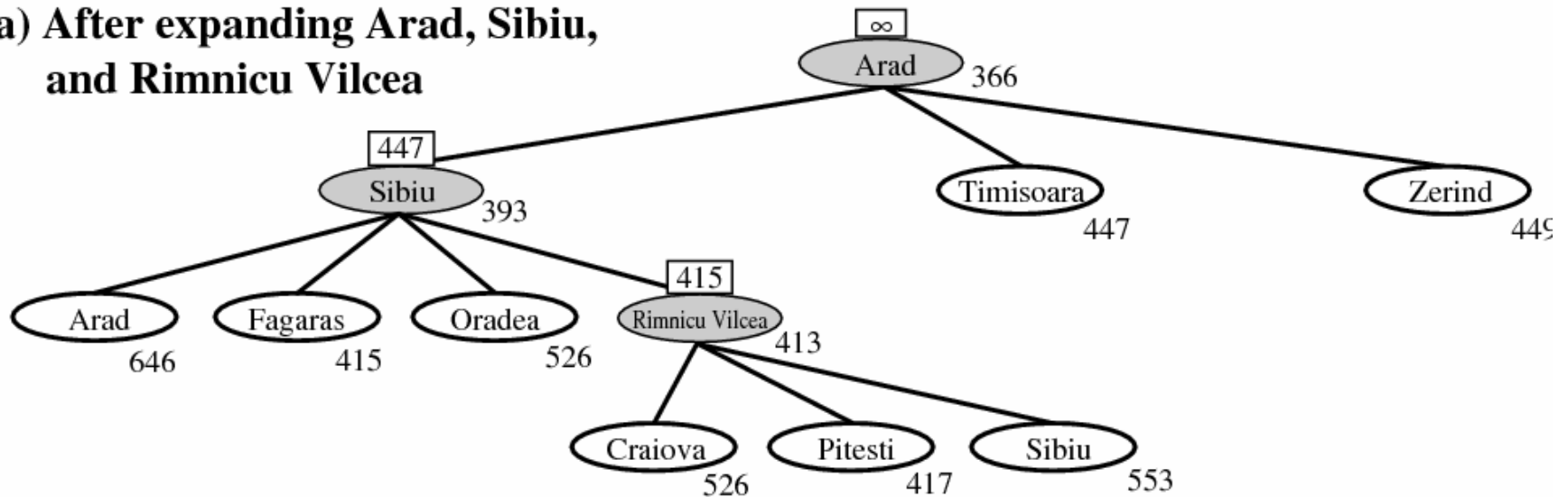
alternative $\leftarrow$ the second lowest *f*-value node among *successors*

result, $f[\text{best}] \leftarrow \text{RBFS}(\text{problem}, \text{best}, \min(f\text{-limit}, \text{alternative}))$

if *result* $\neq$ *failure* **then return** *result*

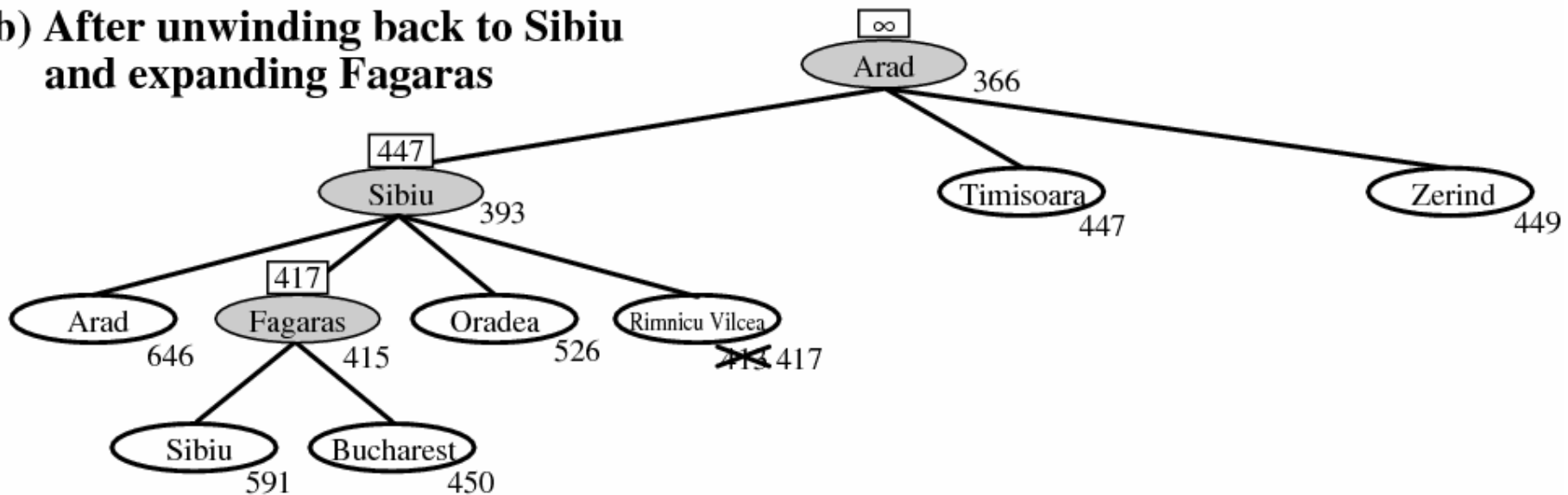
Exemplo RBFS (1)

(a) After expanding Arad, Sibiu, and Rimnicu Vilcea



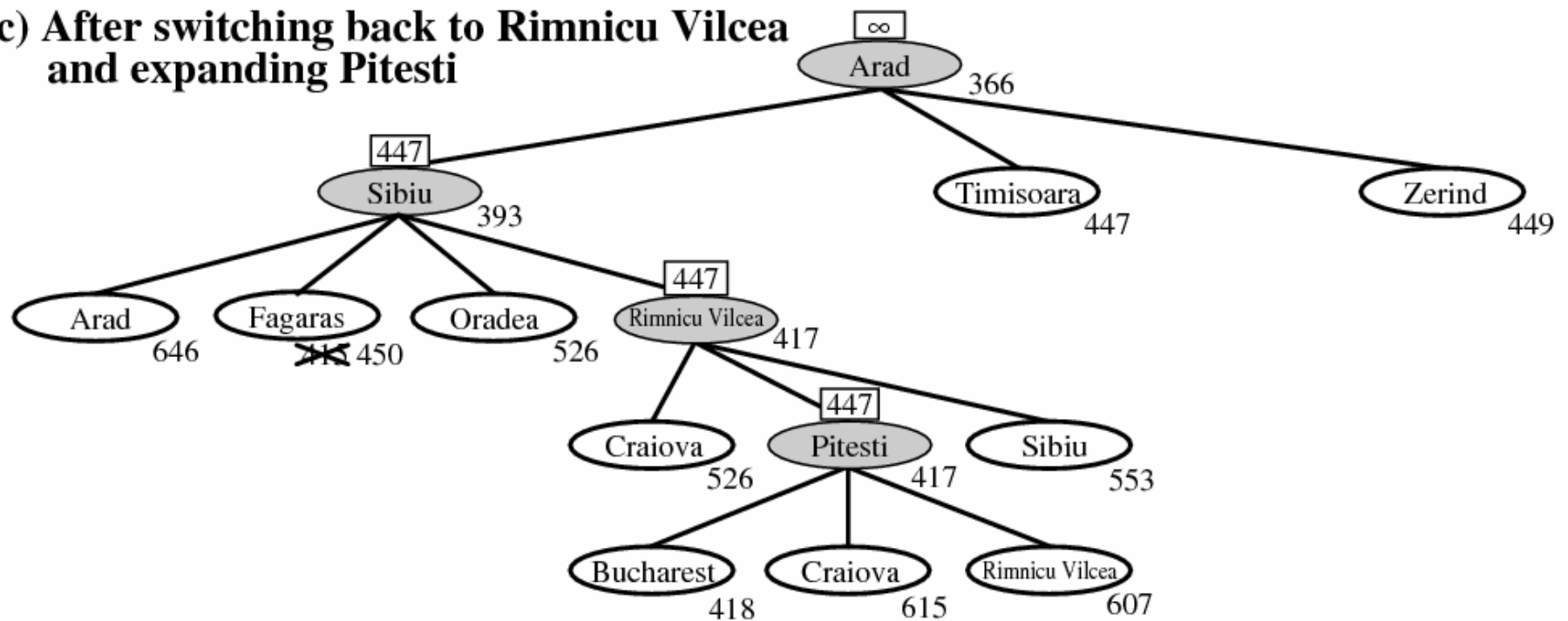
Exemplo RBFS (2)

(b) After unwinding back to Sibiu and expanding Fagaras



Exemplo RBFS (3)

(c) After switching back to Rimnicu Vilcea and expanding Pitesti



Propriedades do RBFS

- Completo
- Espaço linear
- Ótimo (se a heurística for admissível)
- Melhor que o IDA*
- Continua a ter problemas com regenerações sucessivas de nós: utiliza pouca memória...

SMA*

- Tal como no A^* , expande-se a melhor folha até ficar com a memória cheia
- Quando a memória fica toda ocupada, esquece a folha mais antiga com o pior valor, e guarda no pai o seu valor, para possível regeneração
- Um nó só é regenerado quando todos os outros caminhos se mostrarem piores do que aqueles do nó esquecido

```

function SMA*(problem) returns a solution sequence
inputs: problem, a problem
local variables: Queue, a queue of nodes ordered by f-cost

Queue ← MAKE-QUEUE(MAKE-NODE(INITIAL-STATE[problem]))
loop do
  if Queue is empty then return failure
  n ← deepest least-f-cost node in Queue
  if GOAL-TEST(n) then return success
  s ← NEXT-SUCCESSOR(n)
  if s is not a goal and is at maximum depth then  $f(s) \leftarrow \infty$ 
  else  $f(s) \leftarrow \text{MAX}(f(n), g(s) + h(s))$ 
  if all of n's successors have been generated then
    update n's f-cost and those of its ancestors if necessary
  if SUCCESSORS(n) all in memory then remove n from Queue
  if memory is full then
    delete shallowest, highest-f-cost node in Queue
    remove it from its parent's successor list
    insert its parent on Queue if necessary
  insert s on Queue
end

```

Propriedades do SMA*

- O SMA* utiliza *toda* a memória disponível para levar a cabo a procura
- O SMA* é completo se existir uma solução alcançável (cujo caminho caiba em memória)
- Ótimo se existir uma solução ótima alcançável, caso contrário devolve a melhor solução cujo caminho cabe em memória
- Retira da fronteira nós superficiais com valores elevados da função de avaliação. Um nó retirado da fronteira só é regenerado se todos os irmãos forem piores do que ele.
- SMA* é o melhor algoritmo para procurar soluções ótimas, nomeadamente quando o espaço de estados é um grafo, os custos não são uniformes e a geração de nós é mais dispendiosa do que manter listas de nós abertos e fechados.
- Mas as limitações de memória podem tornar um problema intratável...

Outros cenários de procura

- Podem-se resolver problemas de procura “online” com ações deterministas em que se sabem as ações possíveis em cada estado, mas se desconhece o seu efeito antes das executar.
 - Algoritmo cego: Online-DFS (assume ações reversíveis)
 - Algoritmo informado: LRTA*
- Existem ainda outros algoritmos que permitem a alteração dos custos dos arcos em runtime (exemplo navegação robótica):
 - Dynamic A* (D*) e D* Lite
- Outros algoritmos são incrementais e permitem ir melhorando a solução obtida, caso o tempo o permita:
 - ARA* (Anytime repairing A*)
 - AD* (Anytime dynamic A*) = ARA* + D*

Bibliografia

- Capítulos 4.1 e 4.2 (4.5 versões online)
- Para verem as versões dinâmicas dos algoritmos consultar

http://www.ri.cmu.edu/pubs/pub_4975.html